PERBANDINGAN PENGGUNAAN RANTAI MARKOV DAN DISTRIBUSI CAMPURAN DATA TIDAK HUJAN DAN DATA HUJAN UNTUK MENSIMULASI DATA HUJAN HARIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Jurusan Matematika

Oleh:

HAFIED PRIMAHARI
10854004049

UIN SUSKA RIAU

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

PERBANDINGAN PENGGUNAAN RANTAI MARKOV DAN DISTRIBUSI CAMPURAN DATA TIDAK HUJAN DAN DATA HUJAN UNTUK MENSIMULASI DATA HUJAN HARIAN

HAFIED PRIMAHARI
10754004049

Tanggal Sidang :
Tanggal Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Simulasi hujan adalah membangun data hujan yang baru dari data hujan yang sudah ada. Untuk mensimulasi data hujan dapat digunakan beberapa teknik diantaranya rantai Markov dan distribusi campuran. Analisis Markov merupakan sebuah teknik yang berhubungan dengan probabilitas akan *state* di masa mendatang dengan menganalisis probabilitas saat ini. Distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan adalah gabungan dari peluang data tidak hujan dan peluang data hujan yang diasumsikan terdistribusi secara Gamma. Hasil simulasi data hujan dari kedua teknik tersebut berupa data hujan yang baru. Untuk menentukan teknik yang terbaik dalam mensimulasi data hujan dari kedua teknik tersebut maka akan dibandingkan mean atau rata-rata dari simulasi rantai Markov dan distribusi campuran dengan mean atau rata-rata data hujan awalnya. Simulasi dengan mean atau rata-rata yang mendekati mean atau rata-rata data hujan awal merupakan simulasi terbaik.

Katakunci: Distribusi Campuran,Eksponen, Gamma, *Mean*, Rantai Markov, Simulasi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum wr.wb.

Alhamdulillahirabil'alamin segala puji syukur ke hadirat Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini akhir dengan judul **"PERBANDINGAN PENGGUNAAN RANTAI MARKOV DAN DISTRIBUSI CAMPURAN DATA TIDAK HUJAN DAN DATA HUJAN UNTUK MENSIMULASI DATA HUJAN HARIAN"**. Penulisan Tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Stata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Sholawat serta salam senantiasa kita hadiahkan buat junjungan alam Nabi Besar Muhammad SAW, semoga dengan senantiasa bersholawat kita mendapatkan syafa'atnya.

Rasa hormat dan terimakasih yang sangat besar penulis ucapkan kepada keluarga tercinta, ayahanda dan ibunda yang telah memberikan kasih sayang yang tak ternilai harganya kepada penulis serta limpahan doa dan dukungan baik secara materi ataupun berupa semangat untuk kelancaran penulis dalam melakukan perkuliahan. Tak lupa rasa terimakasih kepada adikku tersayang Haditya Primahari dan seseorang yang dekat dan ada dalam suka duka penulis yang telah memberikan semangat kepada penulis.

Pada kesempatan ini pula, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Bapak Rado Yendra, M.Sc selaku Pembimbing I yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan Tugas akhir ini.

5. Ibu Rahmadeni, M.Si selaku Pembimbing II yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan Tugas akhir ini.
6. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas akhir ini.
7. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Penguji II sekaligus koordinator Tugas akhir yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan Tugas akhir ini.
8. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan Tugas akhir ini.

Laporan Tugas Akhir ini telah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Meskipun demikian, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan laporan ini.

Pekanbaru, 29 Juni 2012

Hafied Primahari

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode Rantai Markov dikembangkan oleh seorang ahli Rusia A.A. Markov, pada tahun 1906. Analisis Markov adalah suatu teknik matematik untuk peramalan perubahan pada variabel variabel tertentu berdasarkan pengetahuan dari perubahan sebelumnya. Pada analisis ini terlihat suatu sistem setelah percobaan berulang, dimana hasil dari sistem pada periode yang akan datang dapat ditentukan setelah diketahui sistem yang terjadi pada saat sekarang.

Salah satu data yang bisa diaplikasikan dengan menggunakan rantai markov adalah data hujan. Ketersediaan data hujan dengan lengkap adalah hal terpenting dalam melakukan penelitian yang memerlukan data hujan seperti dalam hal pemodelan ketersediaan air dalam jangka waktu yang panjang dan penentuan secara awal tentang resiko banjir.

Ketersediaan data hujan harian sangat penting dalam hal ini, dikarenakan beberapa permasalahan seperti mahalnya data, kerusakan alat penghitung data hujan dan kelalaian petugas dalam mencatat data hujan harian, menyebabkan penelitian yang berhubungan dengan data hujan harian susah untuk dilakukan. Untuk itu penggunaan rantai Markov akan dilakukan dalam membangkitkan data hujan harian ini. Sebagai pembanding dari penggunaan rantai Markov ini, distribusi campuran untuk data hujan dan tidak hujan juga akan digunakan dalam membangkitkan data hujan harian ini.

Distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan adalah gabungan dari peluang data tidak hujan dan peluang data hujan yang diasumsikan terdistribusi secara Gamma. Perbandingan ini dilakukan untuk dapat mengenal pasti teknik atau tata cara pembangkit data hujan harian yang terbaik. Untuk itu pada penelitian ini dua cara dalam membangkitkan data hujan harian ini akan dilakukan dengan menggunakan data hujan harian yang diperoleh dari stasiun hujan Pekanbaru selama 18 tahun (1990-2008). Hal inilah yang membuat penulis tertarik untuk mengkaji dan menelaah tentang teknik atau tatacara untuk mensimulasi data hujan pada proposal tugas akhir yang berjudul "**Perbandingan Penggunaan Rantai Markov dan Campuran Distribusi Data Tidak Hujan dan Data Hujan untuk Mensimulasi Data Hujan Harian"**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana membandingkan teknik atau tatacara dalam mensimulasi data hujan pada tugas akhir ini yaitu dengan menggunakan teknik rantai markov dan campuran distribusi data tidak hujan dan data hujan.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk menentukan teknik yang terbaik dalam mensimulasi data hujan yang digunakan dalam tugas akhir ini yaitu teknik rantai markov dan campuran distribusi data tidak hujan dan data hujan.

1.4 Batasan Masalah

Simulasi data hujan dapat dilakukan terhadap berbagai skala waktu data hujan seperti tahunan, bulanan dan harian. Oleh sebab itu batasan masalah pada penelitian ini ialah menggunakan dua teknik atau tatacara seperti yang telah disebutkan pada rumusan masalah dengan menggunakan data harian.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang bisa diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Dengan simulasi data hujan kita bisa memprediksi hujan pada masa yang akan datang.
2. Dapat melengkapkan data hujan yang hilang pada stasiun hujan.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mencakup mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendukung dalam menyelesaikan bagian pembahasan masalah. Teori-teori tersebut antara lain meliputi campuran distribusi data tidak hujan dan data hujan, distribusi Gamma dan rantai Markov.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi teori-teori yang meliputi campuran distribusi data tidak hujan dan data hujan, distribusi Gamma dan rantai Markov.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisikan tentang pembahasan penelitian yang didukung dengan literatur yang telah ada.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan tentang kesimpulan dari seluruh pembahasan pada bab-bab sebelumnya dan saran yang berkaitan dengan kajian ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Pengertian Distribusi Gamma, Eksponen dan Uniform

Salah satu distribusi kontinu pada statistik adalah distribusi Gamma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak persoalan dalam bidang rekayasa dan sains. Sebagai salah satu contohnya distribusi Gamma memainkan peran penting dalam teori antrian dan teori keandalan *(reliabilitas)* misalnya untuk mengatasi kehilangan data. Dalam teori probabilitas dan statistik, distribusi gamma adalah keluarga dua-parameter dari distribusi probabilitas kontinu.

Selain distribusi Gamma salah satu distribusi yang banyak digunakan dalam statistika khususnya proses stokastik adalah distribusi eksponen. Distribusi eksponen adalah salah satu kasus khusus dari distribusi Gamma.

Distribusi Uniform Diskrit adalah probabilitas distribusi sederhana yang semua peubah acaknya mempunyai probabilitas yang sama. Untuk pembahasan pada penelitian ini digunakan sebaran uniform acak yang terbentuk dari bilangan acak.

Distribusi Gamma memiliki fungsi densitas sebagai berikut:

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}}$$

dengan nilai ekspektasi dan varians secara berurutan $\boldsymbol{\alpha\beta}$ dan $\boldsymbol{\alpha\beta^2}$.

Distribusi eksponen memiliki fungsi densitas sebagai berikut:

$$\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$$

dengan nilai ekspektasi dan varians secara berurutan $\boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$ dan $(\boldsymbol{\frac{1}{\lambda}})^{\boldsymbol{2}}$.

Pembuktian untuk distribusi Gamma:

Pembuktian fungsi densitas sama dengan 1

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(x\beta)^{\alpha-1}e^{-x}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, \beta\, dx$$

$$= \int_0^{\sim} \frac{x^{\alpha-1}\beta^{\alpha-1}\beta e^{-x}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \int_0^{\sim} \frac{x^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-x}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \int_0^{\sim} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\sim} x^{\alpha-1}e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha)$$

$$= 1\,.$$

Pembuktian ekspektasi dan variansi:

$$\boldsymbol{E(t)} = \int_0^{\sim} t\, f(t) dt$$

$$= \int_0^{\sim} t \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dt$$

$$= \int_0^{\sim} \frac{t^{\alpha}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dt$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\sim} t^{\alpha}e^{-\frac{t}{\beta}} dt$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha + 1)$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}\beta\, \alpha\, \Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

$$= \alpha\, \beta\ .$$

$$\boldsymbol{E(t^2)} = \int_0^{\sim} t^2 f(t) dt$$

$$= \int_0^{\sim} t^2 \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dt$$

$$= \int_0^{\sim} \frac{t^{\alpha+1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dt$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\sim} t^{\alpha+1}e^{-\frac{t}{\beta}} dt$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha+2}\Gamma(\alpha + 2)$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}\beta^{2}\,(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$= \alpha\beta^2(\alpha + 1).$

maka:

$$\boldsymbol{Var(t)} = E(t^2) - [E(t)]^2$$
$$= [\alpha\beta^2(\alpha + 1)\,] - [\alpha\,\beta]^2$$
$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$
$$= \alpha\beta^2\,.$$

Pembuktian untuk distribusi eksponen:

$$\boldsymbol{\int_0^{\sim} f(t)\,dt = 1}$$
$$= \int_0^{\sim} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \int_0^{\sim} \lambda\, e^{-u}\,\frac{du}{\lambda}$$
$$= \int_0^{\sim} e^{-u}\,du$$
$$= [-e^{-u}]_0^{\sim}$$
$$= -e^{\sim} - (-e^0)]$$
$$= 1.$$

Selanjutnya, akan dicari fungsi kumulatifnya:

$$\boldsymbol{F(t)} = \int_0^{x} f(t)\,dt$$
$$= \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \int_0^{\sim} \lambda\, e^{-u}\,\frac{du}{\lambda}$$
$$= \int_0^{x} e^{-u}\,du$$
$$= [-e^{-u}]_0^{x}$$
$$= \left[-e^{-\lambda x} - (-e^0)\right]$$
$$\boldsymbol{= 1 - e^{-\lambda x}}.$$

Pembuktian ekspektasi dan variansi pada distribusi eksponen:

$$\boldsymbol{E(t)} = \int_0^{\sim} t\,f(t)dt$$
$$= \int_0^{\sim} t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \lambda \int_0^{\sim} t\,e^{-\lambda t}\,dt$$

$= \lambda \left\{ t \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]\!\!\Big]_0^{\sim} - \int_0^{\sim} \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t}\, dt \Big\}$

$= \Big[\lambda\, t \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} \Big] + \Big[\left(\lambda \frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\sim} e^{-\lambda t}\, dt \Big]$

$= 0 + \int_0^{\sim} e^{-\lambda t}\, dt$

$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim}$

$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(\sim)} - \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(0)}\right)$

$= 0 + \frac{1}{\lambda}(1) \;\; = \; \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$.

$\boldsymbol{E(t^2)} = \int_0^{\sim} t^2 f(t) dt$

$= \int_0^{\sim} t^2\, \lambda e^{-\lambda t}\, dt$

$= \lambda \left\{ t^2 \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} - \int_0^{\sim} \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} 2t\, dt \right\}$

$= \lambda \left\{ t^2 \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} + \frac{2}{\lambda} \left(\int_0^{\sim} e^{-\lambda t} t\, dt \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ t^2 \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} + \frac{2}{\lambda} \left(t \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} - \int_0^{\sim} \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t}\, dt \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ t^2 \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} + \frac{2}{\lambda} \left(t \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\sim} e^{-\lambda t}\, dt \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ t^2 \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} + \frac{2}{\lambda} \left(t \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} + \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} \right] \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ 0 + \frac{2}{\lambda} \left(0 + \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]\!\!\Big]_0^{\sim} \right] \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(\sim)} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(0)} \right] \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \left[0 + \frac{1}{\lambda}(1) \right] \right) \right\}$

$= \lambda \left\{ \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \right] \right) \right\}$

$= \frac{2\lambda}{\lambda^3}$

$= \frac{2}{\lambda^2}$.

maka:

$$\boldsymbol{Var(t)} = E(t^2) - [E(t)]^2$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.2 Teknik Rantai Markov

2.2.1 Pengertian Teori Markov

Analisis Markov merupakan sebuah teknik yang berhubungan dengan probabilitas akan *state* di masa mendatang dengan menganalisis probabilitas saat ini (dalam Haryadi Sarjono, 2007). Definisi lain menyatakan bahwa metode analisis markov merupakan sebuah metode dalam menganalisis perilaku saat ini dari beberapa variabel dengan tujuan untuk memprediksi prilaku dari variabel yang sama di masa mendatang (Haryadi Sarjono, 2007).

Ciri khas dalam proses Markov, kemungkinan berubah dari suatu keadaan ke keadaan yang lain hanya tergantung pada keadaan saat ini. Hal ini dikenal sebagai sifat Markov.

2.2.2 Pengertian *State*

Suatu keadaan, akibat, atau kejadian (alamiah) pada suatu waktu yang digunakan untuk mengidentifikasi dari seluruh kondisi yang mungkin dari suatu proses atau sistem (Haryadi Sarjono, 2010). *State* ditandai dengan $i = 0,1,2 \ldots, N$ dan lokasi peralihan state $j = 0,1,2, \ldots, N$.

2.2.3 Probabilitas *State*

Setelah *state* dari sistem atau proses yang akan diteliti telah diidentifikasi, langkah selanjutnya adalah menentukan probabilitas sistem berada dalam *state* tertentu menggunakan vektor probabilitas *state*.

$\pi(i)$ = *vektor dari probabilitas state untuk priode i*

$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots\ldots, \pi_n)$

$n \;\; = jumlah\ state$

$\pi_1\ , \pi_2\ , \dots , \pi_n = probabilitas\ state\ ke - 1, state\ ke - 2, \dots, state\ \ ke - n.$

2.2.4 Matriks kemungkinan perpindahan keadaan/transisi

Matriks kemungkinan perpindahan keadaan/transisi merupakan kemungkinan perubahan dari satu keadaan kedalam keadaan yang lain dalam prose Markov disebut kemungkinan transisi, matriks ini juga memungkinkan untuk melakukan perhitungan probabilitas dimasa mendatang berdasarkan pada *State* saat ini. Matriks kemungkinan perpindahan keadaan/transisi dapat ditampilkan dengan matriks kemungkinan transisi seperti pada tabel di bawah ini, dimana P_{nn} adalah peluang data dari keadaan n ke keadaan n.

Tabel 2.1 Tabel matrik kemungkinan transisi

Dari Keadaan ke	Pindah ke keadaan ke					
	1	2	...	j	...	n
1	P_{11}	P_{12}	....	P_{1j}	...	P_{1n}
2	P_{21}	P_{22}	....	P_{2j}	...	P_{2n}
...	...	...	....		...	
i	P_{i1}	P_{i2}	....	P_{ij}	...	P_{in}
...	...	...	....	....	...	....
n	P_{n1}	P_{n2}	....	P_{nj}	...	P_{nn}

2.3 Distribusi Campuran Data Tidak Hujan dan Data Hujan

Distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan merupakan pembanding teknik rantai Markov yang digunakan untuk membangkitkan data hujan harian ini. Proses awal distribusi campuran ini dengan memisahkan data hujan dan tidak hujan menjadi kelompok masing-masing. Selanjutnya akan dihitung peluang untuk data tidak hujan dan data hujan.

Peluang data tidak hujan dihitung dengan rumus berikut:

$$P_0 = \frac{k}{n}$$

P_0 = Peluang untuk data tidak hujan

k = Banyak data nol

n = Jumlah data keseluruhan

Peluang data hujan dihitung dengan menggunakan fungsi densitas distribusi Gamma sebagai berikut :

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

Dari fungsi densitas distribusi Gamma dapat di hitung nilai α dan β. Nilai α dan β yang telah didapat akan disubstitusikan ke fungsi densitas distribusi Gamma, setelah disubstitusikan maka telah didapatkan peluang untuk data hujan menggunakan distribusi Gamma.

Setelah didapatkan peluang untuk data tidak hujan dan data hujan, kedua peluang tersebut akan ditambahkan sehingga menjadi fungsi densitas distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan sebagai berikut :

$$f(t) = P_0 + \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

Dari fungsi densitas distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan perlu ditentukan fungsi komulatif distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan untuk menjamin simulasi data hujan harian dapat dilakukan. Fungsi komulatif distribusi campuran sebagai berikut :

$$F(t) = P_0 + (1 - P_0)\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}.$$

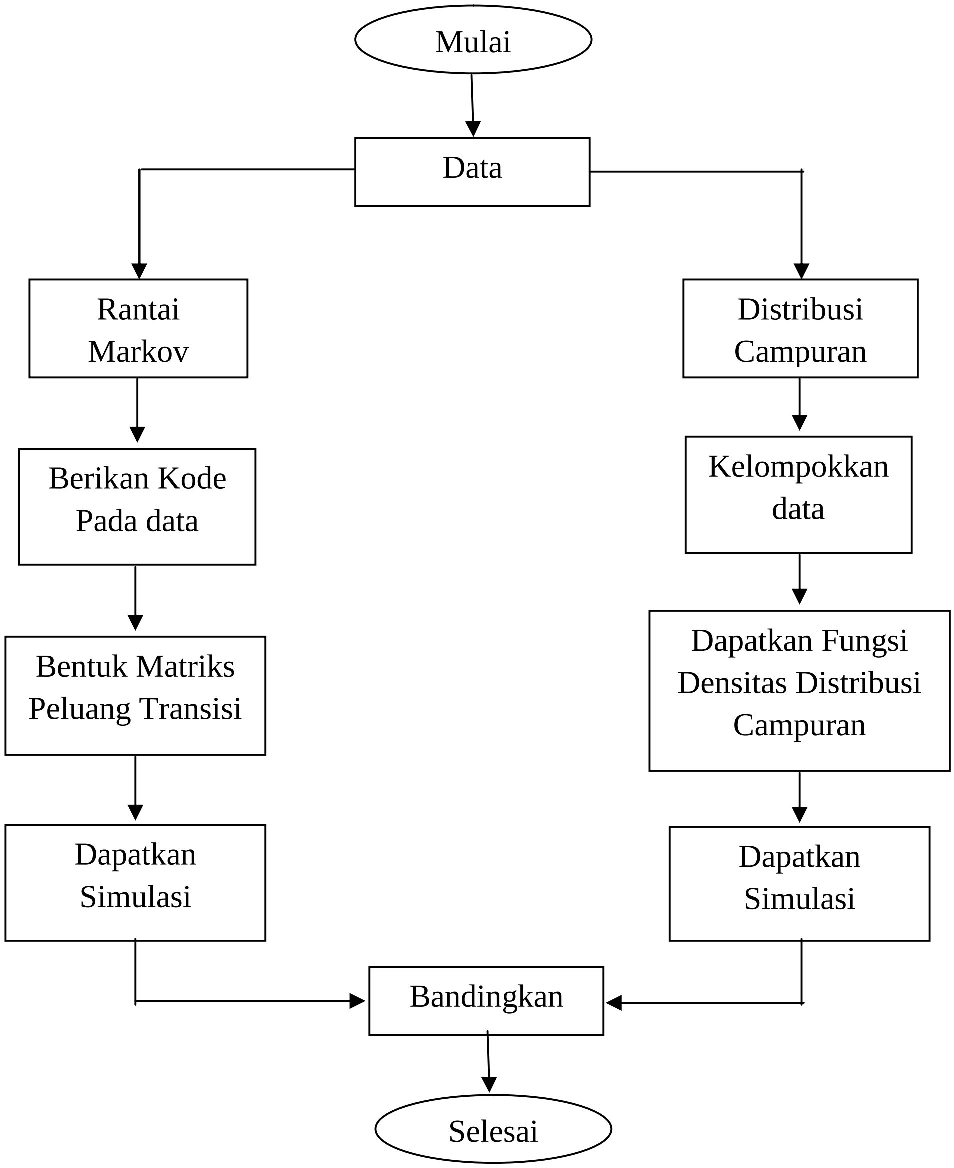
BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data hujan harian yang diperoleh di BMKG Pekanbaru selama 18 tahun dari tahun 1990-2008.

Langkah-langkah umum yang dilakukan dalam penulisan adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan fungsi densitas distribusi campuran hujan dan tidak hujan dengan cara mengelompokkan data menjadi bagian yaitu data hujan dan tidak hujan.
2. Menentukan peluang tidak hujan dan peluang data hujan yang di asumsikan terdistribusi secara Gamma sehingga diperoleh fungsi densitas campuran data tidak hujan dan data hujan dengan menggabungkan kedua peluang tersebut.
3. Memberikan kode 0 untuk tidak hujan dan 1 untuk hujan, seterusnya bentuk matriks peluang transisi rantai Markov.
4. Membangkitkan data hujan dengan menggunakan teknik yang disebut pada langkah 2 (campuran distribusi tidak hujan dan hujan) dan langkah 3 (rantai markov).
5. Melakukan perbandingan untuk menentukan yang terbaik.

Langkah-langkah tersebut diatas digambarkan dalam *flowchart* di bawah ini:



Gambar 3.1 *Flowchart* Metode Penelitian

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

4.1 Teknik Rantai Markov

Analisis Markov merupakan sebuah teknik yang berhubungan dengan probabilitas akan *state* di masa mendatang dengan menganalisis probabilitas saat ini. Data yang digunakan pada tugas akhir ini yaitu data hujan harian yang diperoleh dari stasiun hujan Pekanbaru selama 18 tahun (1990-2008). Untuk memudahkan penghitungan simulasi hujan dengan rantai Markov maka digunakan software R. Data awal dapat dilihat pada lampiran A. Langkah-langkah penghitungan simulasi Markov dengan menggunakan 10 hari data hujan yang diambil dari data hujan awal dari tanggal 1-10 Agustus tahun 1991 adalah sebagai berikut :

Data hujan misalkan diberi nama $DH = \{0, 0, 1.8, 0, 0, 0, 0, 0, 1.2, 1.6\}$. Deretan data hujan tersebut terdiri dari 0 yang menandakan hari tersebut tidak hujan dan $1.8, 1.2, 1.6$ merupakan jumlah curah hujan dalam satu hari. Pada data hujan juga terdapat simbol TTU yang berarti data hujan yang hilang Selanjutnya kita memberikan kode 0 untuk data tidak hujan dan TTU, dan kode 1 untuk data hujan, maka data hujan sebelumnya menjadi $DH = \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1\}$. Setelah itu kita memberikan kode P_{01} untuk hari sebelumnya tidak hujan dan P_{11} untuk hari sebelumnya hujan, maka data hujan selanjutnya menjadi $DH = \{P_{01}, P_{01}, P_{01}, P_{11}, P_{01}, P_{01}, P_{01}, P_{01}, P_{01}, P_{11}\}$.

Selanjutnya kita menentukan nilai P_{01} dan P_{11} yang didapat dari matriks peluang transisi seperti dibawah ini :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks peluang transisi diperoleh $P_{01} = 2/7$ dan $P_{11} = 1/2$. Nilai P_{01} dan P_{11} disubstitusikan ke data hujan sebelumnya, maka data hujan selanjutnya menjadi $DH = \{$0.286, 0.286, 0.286, 0.5 0.286, 0.286, 0.286, 0.286, 0.286, 0.5$\}$. Setelah itu bentuk sebaran uniform acak dengan bantuan software

R kemudian bandingkan dengan data hujan yang telah disubstitusikan ke nilai P_{01} dan P_{11}. Sebaran uniform acak $SU =$ {0.461, 0.831, 0.634, 0.261, 0.247, 0.509, 0.294, 0.710, 0.6, 0.286}. Nilai uniform < P_{01} atau P_{11} akan diberi kode 1 yang berarti hujan, sedangkan uniform > P_{01} atau P_{11} akan diberi kode 0 atau tak hujan.

Sebaran uniform acak yang dibandingkan dengan data hujan yang telah disubstitusikan ke nilai P_{01} dan P_{11} akan menghasilkan simulasi data hujan $DH = \{0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1\}$. Menentukan jumlah curah hujan pada simulasi tersebut menggunakan rumus dibawah ini :

$$y(t) = \ data\ hujan\ terkecil\ pada\ data\ awal\ - \lambda(\ uniform\ baru)$$

$$\lambda = \frac{\sum x}{n}$$

λ = parameter untuk distribusi eksponen

$\sum x$ = jumlah data hujan pada data awal

n = banyaknya data hujan pada data awal

$$\lambda = \frac{\sum x}{n} = \frac{4.6}{3} = 1.533$$

$y(t) =$ 1.2 – $1.533(0.1627)$ = 0.9506

$y(t) =$ 1.2 – $1.533(0.315)$ =0.7171

$y(t) =$ 1.2 – $1.533(0.378)$ =0.6205

Nilai $y(t)$ yang diperoleh di subtitusikan ke simulasi data hujan, maka simulasi data hujan dengan teknik rantai Markov $DH =$ {0, 0, 0, 0.9506, 0.7171, 0, 0, 0, 0, 0.6205}.

Langkah-langkah diatas merupakan proses penghitungan simulasi hujan untuk teknik rantai Markov. Untuk simulasi hujan pada data hujan harian dari tahun 1990-2008 digunakan software R agar lebih memudahkan penghitungan dikarenakan data yang cukup banyak. Hasil simulasi data hujan harian dengan menggunakan rantai Markov yang dapat dilihat pada Lampiran B.

Simulasi data hujan harian yang telah diperoleh akan dihitung rata-rata, maka diperoleh rata-rata simulasi hujan rantai Markov $= 9.111747$. Rata-rata tersebut akan dibandingkan dengan rata-rata data hujan awal yaitu 8.565274. Selisih rata-rata simulasi hujan rantai Markov dengan rata-rata data hujan awal 0.546473. Selisih yang dihasilkan tidak lebih dari 1, artinya simulasi yang dilakukan cukup baik.

4.2 Distribusi Campuran

Distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan adalah gabungan dari peluang data tidak hujan dan peluang data hujan yang diasumsikan terdistribusi secara Gamma. Langkah-langkah penghitungan simulasi distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan dengan menggunakan 10 hari data hujan yang diambil dari data hujan awal dari tanggal 1-10 Agustus tahun1991 adalah sebagai berikut :

Data hujan $DH = \{0, 0, 1.8, 0, 0, 0, 0, 0, 1.2, 1.6\}$. Deretan data hujan tersebut terdiri dari 0 yang menandakan hari tersebut tidak hujan dan 1.8, 1.2, 1.6 merupakan jumlah curah hujan dalam satu hari. Pada data hujan juga terdapat simbol TTU yang berarti data hujan yang hilang Selanjutnya kita memberikan kode 0 untuk data tidak hujan dan TTU, dan kode 1 untuk data hujan, maka data hujan sebelumnya menjadi $= \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1\}$.

Langkah selanjutnya menghitung peluang untuk data tidak hujan dengan rumus dibawah ini :

$$P_0 = \frac{k}{n}$$

P_0 = Peluang untuk data tidak hujan

k = Banyak data nol

n = Jumlah data keseluruhan

$$P_0 = \frac{k}{n} = \frac{7}{10} = 0.7$$

Setelah P_0 diperoleh maka akan dihitung peluang untuk data hujan menggunakan distribusi Gamma dengan menentukan parameter α dan β terlebih dahulu. Dengan menggunakan software R maka diperoleh :

$\alpha = 25.19048$

$\beta\ = 0.0608697$

α dan β akan disubstitusikan ke fungsi densitas distribusi Gamma

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \tag{4.1}$$

$$f(t) = \frac{t^{25.19048-1}e^{-\frac{t}{0.0608697}}}{0.0608697^{25.19048}\Gamma(25.19048)} \tag{4.2}$$

maka fungsi densitas distribusi campuran dan fungsi komulatif distribusi campuran yaitu

$$f(t) = 0,7 + \frac{t^{25.19048-1}e^{-\frac{t}{0.0608697}}}{0.0608697^{25.19048}\Gamma(25.19048)} \tag{4.3}$$

$$F(t) = 0,7 + (1-0,7)\int_{0}^{x} \frac{t^{25.19048-1}e^{-\frac{t}{0.0608697}}}{0.0608697^{25.19048}\Gamma(25.19048)}\,dt \tag{4.4}$$

Proses penghitungan selanjutnya kembali menggunakan software R untuk memudahkan penghitungan simulasi data hujan, maka diperoleh simulasi data hujan harian dengan menggunakan distribusi campuran yaitu {0, 0.9575818, 0, 3.42852, 0, 1.0354156, 0, 0, 0, 0}.

Langkah-langkah diatas merupakan proses penghitungan simulasi hujan untuk distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan. Untuk simulasi hujan pada data hujan harian dari tahun 1990-2008 digunakan software R agar lebih memudahkan penghitungan dikarenakan data yang cukup banyak.

Menggunakan software R diperoleh $P_0\ =\ 0.4956772$, $\alpha\ =\ 0.1812610$, dan $\beta = 93.69758$. Nilai α dan β akan disubstitusikan ke fungsi densitas distribusi Gamma sehingga akan diperoleh fungsi komulatif distribusi campuran yaitu

$$F(t) = 0,4956772 + (1-0,4956772)\int_{0}^{x} \frac{t^{0,1812610-1}e^{-\frac{t}{93,69758}}}{93,69758^{0,1812610}\Gamma(0,1812610)}\,dt \tag{4.5}$$

Langkah selanjutnya menggunakan software R untuk memudahkan proses penghitungan simulasi. Hasil simulasi data hujan harian dengan menggunakan distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan dapat dilihat pada Lampiran B.

Simulasi data hujan harian yang telah diperoleh akan dihitung rata-rata, maka diperoleh rata-rata simulasi hujan distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan $= 8.86366$. Rata-rata tersebut akan dibandingkan dengan rata-rata data hujan awal yaitu 8.565274. Selisih rata-rata simulasi hujan rantai distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan dengan rata-rata data hujan awal 0.29794. Selisih yang dihasilkan tidak lebih dari 1, artinya simulasi yang dilakukan cukup baik.

Rata-rata dari kedua simulasi yang telah dibandingkan dengan rata-rata data awal menghasilkan selisih yang tidak lebih dari 1 yaitu 0.546473 pada teknik rantai Markov dan 0.29794 pada distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan. Selisih yang lebih kecil adalah 0.29794 pada distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan, maka untuk mensimulasi data hujan harian untuk wilayah Pekanbaru distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan lebih baik dari teknik rantai Markov karena selisih rata-rata distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan lebih kecil dari teknik rantai Markov.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan bab IV diperoleh rata-rata untuk data simulasi hujan harian rantai Markov dan distribusi campuran yaitu 9.111747 dan 8.86366. Rata-rata simulasi kedua cara tersebut akan dibandingkan dengan rata-rata data awal yaitu 8.565274.

Rata-rata dari kedua simulasi yang telah dibandingkan dengan rata-rata data awal menghasilkan selisih yaitu 0.546473 dan 0.29794 untuk teknik rantai Markov dan distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan. Selisih yang lebih kecil adalah 0.29794 pada distribusi campuran data tidak hujan dan data hujan, maka distribusi campuran ini dikatakan teknik terbaik untuk mensimulasi data hujan harian untuk wilayah Pekanbaru.

5.2 Saran

Tugas akhir ini menggunakan dua cara untuk mensimulasi data hujan harian untuk wilayah Pekanbaru. Pembaca dapat menggunakan kedua cara simulasi hujan ini untuk wilayah yang lain, bahkan jika perlu menggunakan metode simulasi yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Brain, L.J and M. Engelhardt. *Introduction to Probability end Mathematical Statistics. 2nd ed.* California : Duxbury Press. 1987.

Haryadi & Tjia. “Model Rantai Markov Pangsa Pasar Operator Seluler Di Universitas Bina Nusantara”. *Jurnal The Winner.* Vol.8 No 2, halaman 139-145, 2007.

J.Supranto. *Statistik Teori dan Aplikasi Edisi Kelima*. Jakarta : Erlangga. 1990.

Martono, K. *Kalkulus*. Bandung : Erlangga. 1999.

Raharjo, Swasono dan Pramono Sidi. “Kombinasi Poisson Gamma untuk Menaksir Kredibilitas pada Model Morris-Van Slyke”.*Jurnal Matematika*, Sains dan Teknologi vol. 3 No. 2. 2002.

Sarjono, Haryadi. *Aplikasi Riset Operasi*. Jakarta : Salemba Empat. 2010.

Warpole, R.E. *Pengantar Statistik edisi 3*. Jakarta: PT. Gramedia. 1995.

Yamane, Taro. *Statistik an Introductory Analysis Third Edition*. Tokyo : Harper International Edition. 1973.